

Wyboczenie cienkościennej ramy prostokątnej – badania teoretyczne

Krzysztof Magnucki¹, Szymon Milecki¹¹Institut Pojazdów Szynowych TABOR, Poznań
email: szymon.milecki@tabor.com.pl

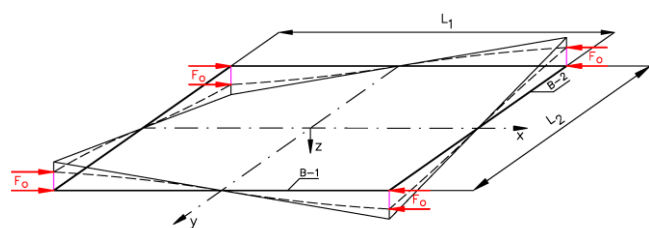
STRESZCZENIE: Przedmiotem badań analitycznych i numerycznych MES jest cienkościenna rama prostokątna poddana ścisnaniu siłami przyłożonymi w narożach. Uwzględniono dwa przypadki obciążenia: ścisnienie ramy wzdłuż belek podłużnych lub ścisnienie ramy wzdłuż belek poprzecznych. Cienkościenne belki podłużne i poprzeczne o przekrojach otwartych połączone są w sztywnych narożach ramy. Opisane są dwie postaci wyboczenia ramy: antysymetryczna – zwichrzenie oraz symetryczna w płaszczyźnie ramy. Opracowano modele analityczne i sformułowano równania przestępne, na podstawie których wyznaczono obciążenia krytyczne. Ponadto, opracowano model numeryczny MES (SolidWorks) ramy i wyznaczono również obciążenia krytyczne. Wartości te wyznaczone dwiema metodami porównano z sobą.

SŁOWA KLUCZOWE: rama prostokątna, wyboczenie – zwichrzenie, obciążenia krytyczne

1. Wprowadzenie

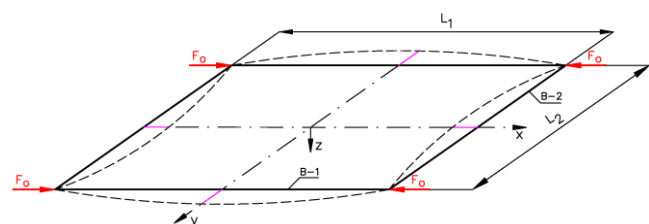
Zagadnienia stateczności konstrukcji zapoczątkowane przez L. Eulera w 1744 roku były szczególnie intensywnie rozwijane w dwudziestym wieku. Wyniki tych badań zestawiono w licznych monografiach, np. Thompson i Hunt [1] przedstawili ogólną teorię stateczności sprężystej, natomiast Bażant i Cedolin [2] zagadnienia stateczności prętów, płyt i powłok. Weiss i Giżejowski [3], Trahair [4] oraz Magnucki [5] opisali szczegółowo stateczność belek cienkościennych o przekrojach otwartych. Van der Heijden [6] zestawiał tematycznie prace W.T. Koitera dotyczące stateczności konstrukcji. Kim i inni [7] oraz Basaglia i inni [8, 9] przedstawili zagadnienia dotyczące wyboczenia ogólnego lub miejscowego ram cienkościennych.

Przedmiotem badań jest rama prostokątna o długości L_1 i szerokości L_2 poddana ścisnaniu w płaszczyźnie xy siłami F_0 (rys. 1). Cienkościenne belki podłużne B-1 i poprzeczne B-2 o przekrojach otwartych połączone są w sztywnych narożach. Rozpatrywane są dwie postaci wyboczenia ramy: a) antysymetryczna gięto-skrętna – zwichrzenie (rys. 1) oraz b) symetryczna giętna w płaszczyźnie xy (rys. 2).



Rys. 1. Schemat zwichrzenia ramy

Wyboczenie – zwichrzenie ramy jest postaci antysymetrycznej, występuje zatem jednocześnie zginanie i skręcanie belek podłużnych i poprzecznych.

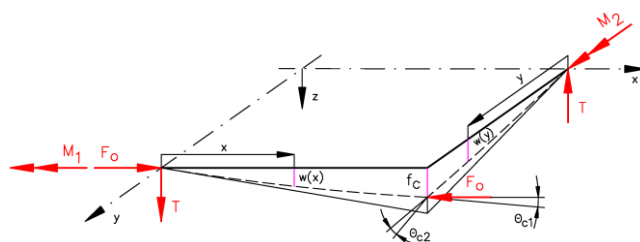


Rys. 2. Schemat symetrycznego wyboczenia ramy

Wyboczenie giętno w płaszczyźnie ramy jest postaci symetrycznej i jest klasycznym problemem opisanym szczegółowo w licznych pracach np. [2] i [10].

2. Badania analityczne zwichrzenia ramy

Opis analityczny zwichrzenia, z uwagi na jego postać antysymetryczną, sformułowano dla ćwiartki ramy (rys. 3).



Rys. 3. Schemat obciążeń w ćwiartce ramy

Momenty skręcające belki B-1 i B-2 są następujące

$$M_1 = \frac{1}{2} TL_2, \quad M_2 = F_0 f_c - \frac{1}{2} TL_2 \quad (1)$$

gdzie: T – siła poprzeczna, f_c – przemieszczenie naroża.

Momenty zginające belki B-1 i B-2 są następujące

$$M_b(x) = F_0 w(x) - Tx, \quad M_b(y) = Ty \quad (2)$$

Uwzględniając te momenty w odpowiednich równaniach różniczkowych wyznaczono linie ugięcia oraz kąty skręcenia. Następnie z warunków zgodności dla kątów obrotów przekrojów oraz przemieszczeń połączonych belek w narożu ramy otrzymano równanie przestępne

$$(1 + 6C_{v1}) \frac{J_{y1}}{J_{x2}} \left(\frac{L_2}{L_1} \right)^3 \phi_1(k_1, \alpha_2) - 12 \frac{\phi_2(k_1, \alpha_2)}{(k_1 L_1)^2} = 0 \quad (3)$$

gdzie $k_1 = \sqrt{\frac{F_0}{EJ_{y1}}}$, $\alpha_1 = \sqrt{\frac{GJ_{s1}}{EJ_{y1}}}$, $\alpha_2 = \sqrt{\frac{GJ_{s2}}{EJ_{\omega 2}}}$,

$C_{v1} = (1 + \nu) \left[1 - \frac{\tanh(\alpha_1 L_1 / 2)}{\alpha_1 L_1 / 2} \right] \frac{J_{x2} L_1}{J_{s1} L_2}$, C_{v2} – analogiczny,

$\phi_1(k_1, \alpha_2) = \frac{k_1 L_1}{\tan(k_1 L_1 / 2)} - (k_1 L_1)^2 C_{v2}$, $\phi_2(k_1, \alpha_2) = \phi_1 - 2$.

Opis analityczny symetrycznego wybożenia w płaszczyźnie ramy (rys. 2) prowadzi do następującego równania przestępnego

$$\frac{1 - \cos(k_1 L_1)}{k_1 L_1 \sin(k_1 L_1)} \frac{J_{z2}}{J_{z1}} \frac{L_1}{L_2} + \frac{1}{2} = 0 \quad (4)$$

Szczegółowe obliczenia wykonano dla przykładowych danych: belki wzdluzne B-1 są dwuteownikami I240p o dlugosciach $L_1 = 3.2$ m, natomiast belki poprzeczne B-2 są ceownikami C200E o dlugosciach $L_2 = 1.7$ m.

Wartości obciążeń krytycznych dla zwichrzenia ramy wyznaczone na podstawie równania (3) są następujące:

$$F_{0,CR,Analyt}^{(x-Lat)} = 46.24 \text{ kN} - \text{ściskanie wzdluzne} - \text{oś } x,$$

$$F_{0,CR,Analyt}^{(y-Lat)} = 24.53 \text{ kN} - \text{ściskanie poprzeczne} - \text{oś } y.$$

Natomiast wartości obciążeń krytycznych dla symetrycznego wybożenia ramy wyznaczone na podstawie równania (4) są następujące:

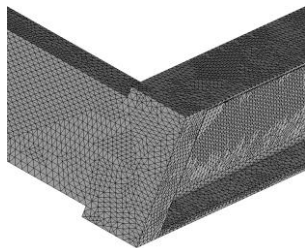
$$F_{0,CR,Analyt}^{(x-S)} = 700.0 \text{ kN} - \text{ściskanie wzdluzne} - \text{oś } x,$$

$$F_{0,CR,Analyt}^{(y-S)} = 1301.8 \text{ kN} - \text{ściskanie poprzeczne} - \text{oś } y.$$

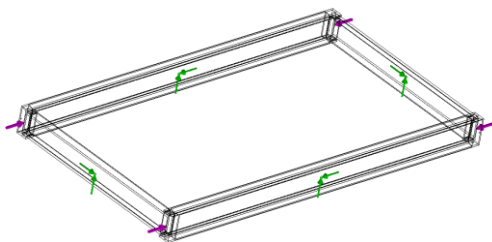
Porównując obliczone wartości obciążeń krytycznych dla dwóch różnych postaci wybożenia można stwierdzić, że utrata stateczności badanej ramy będzie zwichrzeniem.

3. Badania numeryczne MES zwichrzenia ramy

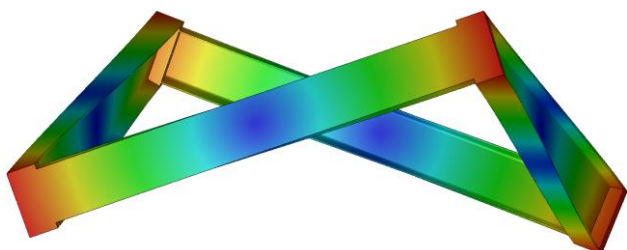
Opracowano model numeryczny MES ramy w systemie SolidWorks dla przyjętych przykładowych danych. Poszczególne belki modelowano elementami bryłowymi spełniając właściwe połączenie w narożach (rys. 4).



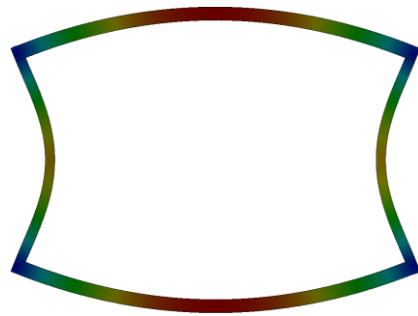
Rys. 4. Schemat modelowanego MES naroża ramy



Rys. 5. Model numeryczny MES ramy



Rys. 6. Postać antysymetryczna wybożenia – zwichrzenie



Rys. 7. Postać symetryczna wybożenia ramy

Wartości obciążeń krytycznych dotyczące zwichrzenia ramy wyznaczone numerycznie MES są następujące:

$$F_{0,CR,MES}^{(x-Lat)} = 45.86 \text{ kN} - \text{ściskanie wzdluzne} - \text{oś } x,$$

$$F_{0,CR,MES}^{(y-Lat)} = 23.54 \text{ kN} - \text{ściskanie poprzeczne} - \text{oś } y.$$

Natomiast wartości obciążeń krytycznych dotyczące symetrycznego wybożenia ramy są następujące:

$$F_{0,CR,MES}^{(x-S)} = 733.5 \text{ kN} - \text{ściskanie wzdluzne} - \text{oś } x,$$

$$F_{0,CR,MES}^{(y-S)} = 1242.8 \text{ kN} - \text{ściskanie poprzeczne} - \text{oś } y.$$

4. Podsumowanie

Badania analityczne i numeryczne MES ściskanej ramy prostokątnej wykazały, że wartości obciążeń krytycznych dla antysymetrycznego wybożenia – zwichrzenia są znacznie mniejsze niż dla symetrycznego. Zatem, utrata stateczności ramy nastąpi przez jej zwichrzenie. Porównując wartości obciążeń krytycznych wyznaczone dwiema metodami łatwo zauważyć, że największa różnica między nimi jest około 5% dla wybożenia symetrycznego.

Praca została wykonana w ramach działalności statutowej: Instytut Pojazdów Szynowych „TABOR” w Poznaniu.

Literatura

- [1] Thompson J. M. T., Hunt G. W., *A general theory of elastic stability*, John Wiley & Sons, London, New York, Sydney, Toronto 1973.
- [2] Bażant Z. P., Cedolin L., *Stability of structures. Elastic, inelastic, fracture, and damage theories*, Oxford University Press, New York, Oxford 1991.
- [3] Weiss S., Giżejowski M., *Stateczność konstrukcji metalowych*. Arkady, Warszawa 1991.
- [4] Trahair N. S., *Flexural-torsional buckling of structures*. E&EF Spon, an imprint of Chapman & Hall, London, Glasgow, Tokyo, Melbourne, Madras 1993.
- [5] Magnucki K., *Niektóre problemy optymalizacji konstrukcji prętowych i powłok z uwzględnieniem stateczności sprężystej*. Wyd. Pol. Poznańskiej, Poznań 1993.
- [6] Van der Heijden A. M. A. (Ed), *W.T. Koiter's elastic stability of solids and structures*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne, Madrid, Cape Town, Singapore, São Paulo 2008.
- [7] Kim S-E., Uang C-M., Choi S-H., An K-Y., *Practical advanced analysis of steel frames considering lateral-torsional buckling*. Thin-Walled Structures, Vol. 44, pp. 709-720, 2006.
- [8] Basaglia C., Camotim D., Silvestre N., *Global buckling analysis of plane and space thin-walled frames in the context of GBT*. Thin-Walled Structures, Vol. 46, pp. 79-101, 2008.
- [9] Basaglia C., Camotim D., Silvestre N., *GBT-based local, distortional and global buckling analysis of thin-walled steel frames*. Thin-Walled Structures, Vol. 47, pp. 1246-1264, 2009.
- [10] Rykaluk K., *Zagadnienia stateczności konstrukcji metalowych*. Dolnośląskie Wyd. Edukacyjne, Wrocław 2012.