

XVI Konferencja Naukowo-Techniczna

TKI2022

TECHNIKI KOMPUTEROWE W INŻYNIERII

18–21 października 2022

Efektywne kształtowanie stopniowanej belki sandwiczowej z utwierdzonymi końcami

Krzysztof Magnucki, Joanna Kustosz, Damian Goliwąg

Sieć Badawcza Łukasiewicz – Poznański Instytut Technologiczny, Centrum Pojazdów Szynowych

email: krzysztof.magnucki@pit.lukasiewicz.gov.pl, joanna.kustosz@pit.lukasiewicz.gov.pl, damian.goliwas@pit.lukasiewicz.gov.pl

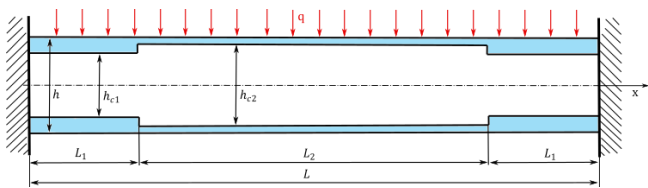
STRESZCZENIE Przedmiotem pracy jest belka sandwiczowa o zmiennej–stopniowanej grubości warstw w trzech przedziałach wzdłuż jej długości. Wysokość i szerokość przekroju poprzecznego oraz jej masa są stałe. Belka obciążona jest równomiernie na całej długości. Układ dwóch równań równowagi, sformułowany z uwzględnieniem literatury, rozwiązano analitycznie dla kolejnych przedziałów belki i wyznaczono w nich funkcje efektu ścinania oraz ugięcia belki. Efektywne stopniowanie grubości warstw określono na podstawie przyjętego kryterium dotyczącego minimalizacji maksymalnego ugięcia belki. Wykonano przykładowe obliczenia dla przyjętej belki. Efektywny kształt przykładowej belki przedstawiono na rysunku. W celu wykonania analizy porównawczej opracowano model numeryczny MES belki i wykonano obliczenia. Dodatkowo obliczono wartość maksymalnego ugięcia dla klasycznej belki sandwiczowej.

SŁOWA KLUCZOWE: belka stopniowana, modelowanie analityczne, modelowanie MES, kryterium kształtowania

1. Wprowadzenie

Belki, płyty i powłoki sandwiczowe są stosowane jako podstawowe części różnych konstrukcji. Doskonalenie ich właściwości mechanicznych z zastosowaniem modelowania analitycznego, numerycznego oraz badań eksperymentalnych jest przedmiotem współczesnych badań, np. [1, 2-8].

Przedmiotem pracy jest stopniowana belka sandwiczowa w trzech przedziałach na długości L o strukturze symetrycznej z utwierdzonymi końcami. Belka poddana jest równomiernie rozłożonemu obciążeniu o intensywności q (rys. 1).



Rys. 1. Schemat stopniowanej belki sandwiczowej

Stopniowane przedziały o długościach L_1 i L_2 rozłożone są symetrycznie. Długość całkowita belki $L=2L_1+L_2$. Masa belki jest stała, stałe są masy okładzin i rdzenia. Zatem, objętości okładzin i rdzenia są również stałe.

2. Modelowanie analityczne

Efektywne kształtowanie stopniowanej belki jest analizowane z uwzględnieniem klasycznej belki sandwiczowej o stałej grubości okładzin h_f i rdzenia h_c oraz szerokości b . Zatem, warunek stałej objętości rdzenia jest postaci

$$2\lambda_1\chi_{c1} + \lambda_2\chi_{c2} = \lambda\chi_c \quad (1)$$

gdzie: $\lambda_1=L_1/h$, $\lambda_2=L_2/h$, $\lambda=L/h$, $\chi_{c1}=h_{c1}/h$, $\chi_{c2}=h_{c2}/h$, $\chi_c=h_c/h$, $2\lambda_1+\lambda_2=\lambda$, oraz

$$\chi_{c2} = \frac{\lambda\chi_c - 2\lambda_1\chi_{c1}}{\lambda - 2\lambda_1} \quad (2)$$

Układ dwóch równań równowagi dla poszczególnych części belki sandwiczowej, na podstawie pracy [8], jest postaci

$$C_{vvi} \frac{d^2\bar{v}}{d\xi^2} - C_{v\psi i} \frac{d\psi_f}{d\xi} = -6 \left[(\xi - \xi^2) q L^2 - 2M_0 \right] \frac{\lambda}{E_f b h^2} \quad (3)$$

$$C_{v\psi i} \frac{d^3\bar{v}}{d\xi^3} - C_{\psi\psi i} \frac{d^2\psi_f}{d\xi^2} + C_{\psi i} \lambda^2 \psi_f(\xi) = 0 \quad (4)$$

gdzie: C_{vvi} , $C_{v\psi i}$, $C_{\psi\psi i}$, $C_{\psi i}$ – współczynniki, E_f , E_c – moduły Younga, M_0 – moment utwierdzenia, $\xi=x/L$ – współrzędna bezwymiarowa, $\bar{v}(\xi) = v(\xi)/L$ – ugięcie, bezwymiarowe, $\psi_f(\xi)$ – funkcja efektu ścinania, $i=1, 2$ – numery przedziałów.

Rozwiązując ten układ równań wyznaczono funkcje efektu ścinania w przedziałach belki:

- przedział pierwszy $0 \leq \xi \leq \lambda_1/\lambda$, $i=1$

$$\psi_f^{(1)}(\xi) = 6k_{c1} \left[f_{\psi}^{(1)}(\xi) + 1 - 2\xi \right] \lambda \frac{q}{E_f b} \quad (5)$$

gdzie:

$$f_{\psi}^{(1)}(\xi) = \frac{\sinh[\alpha_1(\lambda\xi - \lambda_1)]}{\sinh(\alpha_1\lambda_1)} + \frac{\sinh(\alpha_1\lambda\xi)}{\sinh(\alpha_1\lambda_1)} \left(\frac{k_{c2}}{k_{c1}} - 1 \right) \frac{\lambda_2}{\lambda}$$

- przedział drugi $\lambda_1/\lambda \leq \xi \leq (\lambda_1+\lambda_2)/\lambda$, $i=2$

$$\psi_f^{(2)}(\xi) = 6k_{c2} (1 - 2\xi) \lambda \frac{q}{E_f b} \quad (6)$$

gdzie: k_{c1} , k_{c2} , α_1 – współczynniki bezwymiarowe.

Funkcje te spełniają następujące warunki: $\psi_f^{(1)}(0)=0$, $\psi_f^{(1)}(\lambda_1/\lambda) = \psi_f^{(2)}(\lambda_1/\lambda)$, $\psi_f^{(2)}(1/2) = 0$.

Rozwiązując układ równań równowagi (3) i (4) wyznaczono również funkcje ugięcia $\bar{v}^{(i)}(\xi)$ belki, które spełniają następujące warunki: $\bar{v}^{(1)}(0) = d\bar{v}^{(1)}/d\xi|_0 = 0$, $d\bar{v}^{(1)}/d\xi|_{\lambda_1/\lambda} = d\bar{v}^{(2)}/d\xi|_{\lambda_1/\lambda}$, $\bar{v}^{(1)}(\lambda_1/\lambda) = \bar{v}^{(2)}(\lambda_1/\lambda)$, $d\bar{v}^{(2)}/d\xi|_{1/2} = 0$. Maksymalne ugięcie belki

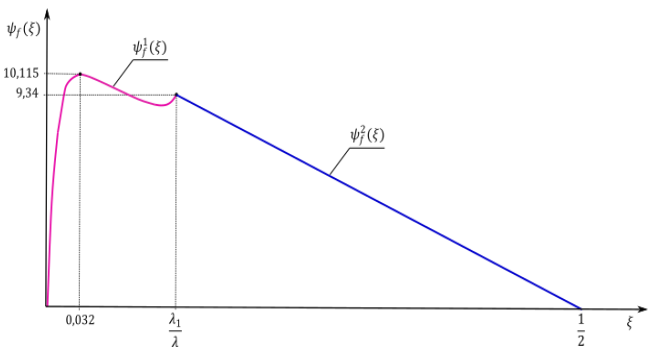
$$\bar{v}_{\max} = \bar{v}^{(2)}(1/2) = \tilde{v}_{\max}(\lambda_1, \chi_{c1}) \frac{q}{E_f b} \quad (7)$$

Tak więc kryterium efektywnego stopniowania grubości warstw belki jest następujące

$$\min_{\lambda_1, \chi_{c1}} \{ \tilde{v}_{\max}(\lambda_1, \chi_{c1}) \} \quad (8)$$

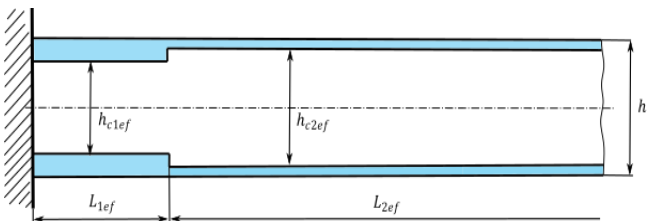
Szczegółowe obliczenia wykonano dla przykładowej belki o następujących danych: $\lambda=20$, $E_c/E_f=1/20$, $\nu_c=0,3$, $\chi_c=17/20$. Otrzymano następujące wartości: $\lambda_{1ef}=2,4$, $\chi_{c1ef}=14,66/20$, $\lambda_{2ef}=15,2$, $\chi_{c2ef}=17,74/20$ oraz ugięcie (8) $\tilde{v}_{\max}^{(An)}=676,02$.

Wykresy funkcji efektu ścinania (5) i (6) w przedziale $(0 \leq \xi \leq 1/2)$ dla przykładowej belki pokazano na rys. 2.



Rys. 2. Wykresy funkcji efektu ścinania

Maksymalne ugięcie dla klasycznej belki sandwiczowej o powyższych danych $\tilde{v}_{\max}^{(An-kl)}=728,66$. Z porównania maksymalnych ugięć obu belek wynika, że sztywność na zginanie przykładowej belki stopniowanej jest większa od klasycznej o około 8%. Postać efektywnego stopniowania grubości warstw przykładowej belki pokazano na rys. 3.

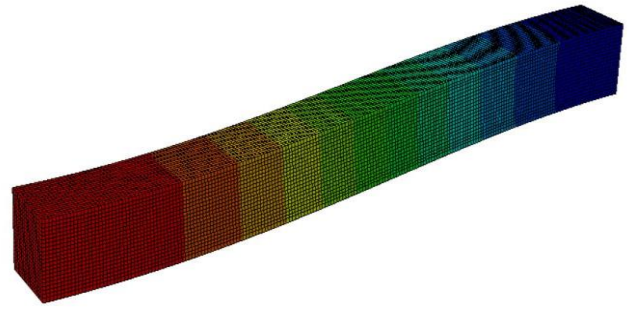


Rys. 3. Schemat efektywnie stopniowanej przykładowej belki sandwiczowej

3. Modelowanie numeryczne MES

Model numeryczny efektywnie stopniowanej przykładowej belki sandwiczowej opracowano w systemie

ABAQUS 6.12 z zastosowaniem 84000 sześciokątnych, liniowych elementów skończonych (rys. 4).



Rys. 4. Model numeryczny MES przykładowej belki

Obliczenia wykonano dla przykładowej belki efektywnie stopniowanej o następujących danych: $L=400$ mm, $h=20$ mm, $L_{1ef}=48$ mm, $h_{c1ef}=14,66$ mm, $L_{2ef}=304$ mm, $h_{c2ef}=17,74$ mm, $E_f=72000$ MPa, $E_c=3600$ MPa, $\nu_c=0,3$, tak więc, takich samych danych jak w obliczeniach analitycznych. Wartość maksymalnego ugięcia obliczona MES $\tilde{v}_{\max}^{(MES)}=678,96$.

Porównując wartości maksymalnych ugięć obliczone dwiema metodami łatwo zauważyć, że różnica między nimi wynosi 0,43%.

4. Podsumowanie

Przeprowadzone badania analityczne i numeryczne przedmiotowej belki sandwiczowej z utwierdzonymi końcami, pozwalają na sformułowanie następujących wniosków:

- 1) stopniowana belka (rys. 1) o kształcie efektywnym charakteryzuje się większą grubością okładzin przy utwierdzonych końcach (rys. 3),
- 2) sztywność opracowanej belki stopniowanej jest większa od klasycznej belki sandwiczowej o około 8%,
- 3) różnica między wartościami maksymalnych ugięć uzyskanych z badań analitycznych i numerycznych wynosi około 0,43%.

Literatura

- [1] Magnucka-Blandzi E., Magnucki K., *Effective design of a sandwich beam with a metal foam core*, Thin-Walled Structures, Vol. 45, No. 4, pp. 432-438, 2007.
- [2] Kreja I., *A literature review on computational models for laminated composite and sandwich panels*, Central European Journal of Engineering, Vol. 1, No. 1, pp. 59-80, 2011.
- [3] Wang Z.D., Li Z.F., *Theoretical analysis of the deformation of SMP sandwich beam in flexure*, Archive of Applied Mechanics, Vol. 81, No. 11, pp. 1667-1678, 2011.
- [4] Nguyen C.H. i in., *Enhanced static response of sandwich panel with honeycomb cores through the use of stepped facings*, Journal of Sandwich Structures and Materials, Vol. 13, No. 2, pp. 237-260, 2011.
- [5] Magnucki K., Szyk W. (red.), *Wytrzymałość i stateczność belek i płyt trójwarstwowych z rdzeniem z pianki metalowej*, Wyd. Politechniki Poznańskiej, Poznań, 2012.
- [6] Sayyad A.S., Ghugal Y.M., *Bending, buckling and free vibration of laminated composite and sandwich beams: a critical review of literature*, Composite Structures, Vol. 171, pp. 486-504, 2017.
- [7] Czechowski L., i in., *Experimental and numerical three-point bending test for sandwich beams*, Journal of KONES Powertrain and Transport, Vol. 24, No. 3, pp. 53-62, 2017.
- [8] Magnucki K. i in., *Three models of a sandwich beam: Bending, buckling and free vibration*, Engineering Transactions, Vol. 70, Online First March 31, 2022.