

XVI Konferencja Naukowo-Techniczna

TK12022

TECHNIKI KOMPUTEROWE W INŻYNIERII

18–21 października 2022

Globalna utrata stateczności eulerowskich słupów o zmiennej gradacji właściwości materiałowych na ich długościach

Andrzej Teter¹, Zbigniew Kołakowski²

¹Katedra Mechaniki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Lubelska

²Katedra Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji K12, Wydział Mechaniczny, Politechnika Łódzka

email: a.teter@pollub.pl, zbigniew.kolakowski@p.lodz.pl

STRESZCZENIE: W pracy analizowano słupy pryzmatyczne o przekrojach dwuteowych, różniące się długością, minimalnym momentem bezwładności oraz warunkami brzegowymi. Ciągłą zmianę własności mechanicznych materiału zdyskredytowano przyjmując różne liczby segmentów słupa o zadanej długości, zakładając liniową ich zmianę. Przyjęcie 20 segmentów na długości słupa można traktować jako ciągły rozkład gradacji materiału na jego długości. Dalsze zwiększanie ich liczby jest niecelowe. Problem własny rozwiązano metodą analityczną, a uzyskane wyniki porównano z rozwiązaniami otrzymanymi metodą elementów skończonych. Otrzymano bardzo dobrą zgodność wyników. W rozwiązaniu analitycznym przyjęto teorię belek Eulera-Bernoulliego dla układów zachowawczych. Zaproponowano procedurę wyznaczania minimalnych, globalnych obciążeń własnych w formie zmodyfikowanego wzoru Eulera.

SŁOWA KLUCZOWE: materiał gradientowy, problem własny, konstrukcje belkowe, belka Eulera-Bernoulliego

1. Wprowadzenie

Zjawisko utraty stateczności słupów wykonanych z materiałów gradientowych jest bardzo interesujące z inżynierskiego punktu widzenia. Zainteresowanie tą tematyką można zauważyć w najnowszych publikacjach. W pracy [1] przedstawiono pół-analityczne podejście (SBFEM) do analizy wybożenia słupów typu sandwich. W [2] omówiono wybożenie osiowo niejednorodnych i funkcjonalnie stopniowanych belek. W pracy [3] opracowano model elementów skończonych do analizy wybożenia osiowo funkcjonalnie stopniowanych (AFG) gradientowych słupów w ramach teorii Eulera-Bernoulliego. Wykorzystując teorię belek Timoshenko w [4] analizowano wybożenie słupów o gradacji poprzecznej. W [5-6] badano nieliniową stateczność konstrukcji 2D o zmiennych właściwościach funkcjonalnie stopniowanych w powierzchni środkowej.

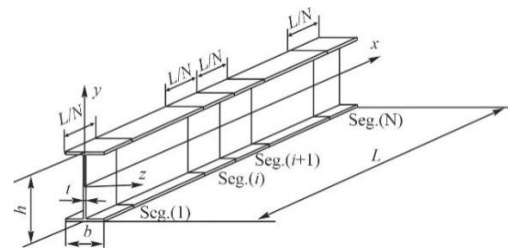
2. Postawienie problemu

Długi, pryzmatyczny słupek o osiowej gradacji właściwości mechanicznych poddano ścisaniu. Zmianę własności mechanicznych w funkcji długości opisano liniową zależnością:

$$E(x) = E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{x}{L}\right) \quad (1)$$

gdzie: E_m , E_c – moduły Young'a dla metalu oraz ceramiki, L – długość słupa, x – współrzędna długości (rys. 1). W przypadku materiału gradientowego typu Al-TiC poszczególne stałe wynoszą: $E_m=69\text{GPa}$, $E_c=480\text{GPa}$. W obliczeniach słupek został podzielony na N segmentów o identycznej długości i o zadanych stałych wartościach stałych materiałowych. Moment bezwładności jest stały na

całej długości słupa. Sztywność zginania w każdym z segmentów wynosi $E_i(x) I_z(\min)=\text{const}$. dla $i=1,2,\dots,N$. Pierwszy segment ($i=1$, gdy $x=0$) wykonany jest aluminium, a ostatni N segment ($x=L$) z węgla tytanu.



Rys. 1. N-segmentowy ściskany słupek (FGM)

3. Metoda rozwiązania

Dla każdego segmentu słupa wynika równanie równowagi i -tego segmentu (rys. 1):

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + k_i^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad (2)$$

gdzie $k_i^2 = \frac{P}{E_i I_z}$.

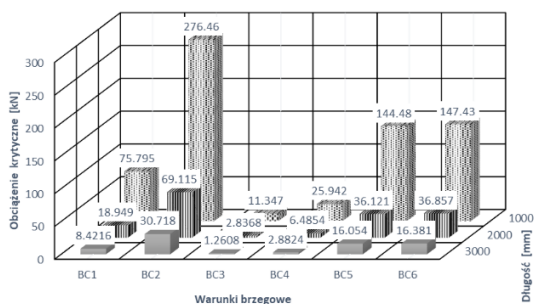
W przypadku omawianego słupa do rozwiązania mamy układ N równań różniczkowych (2). Przyjmując warunki brzegowe oraz warunki ciągłości na krańcach przedziałów otrzymujemy problem wartości własnych o postaci $A(P)X=0$, gdzie nietrywialnych rozwiązań P dla $X \neq 0$ i kwadratowej macierzy współczynników A o $4N$ elementach, poszukujemy z warunku zerowania się wyznacznika współczynników. Wektor własny ma następującą postać: $X = [A_1 \ B_1 \ C_1 \ D_1 \ A_2 \ \dots \ C_N \ D_N]^T$. Wartość zerową wyznacznika wyznaczano metodą przeszukiwania z wykorzystaniem metody siecznych.

Powyższe rozwiązania analityczne porównano z wynikami symulacji numerycznych wykonanymi MES (pakietem Abaqus). Rozwiązano zadanie własne stosując algorytm SUBSPACE. Ściskane słupy modelowano belkowym elementem skończonym typu B33. W przypadku wszystkich długości słupa dobierano wielkość elementów skończonych, tak aby we wszystkich omawianych przypadkach na długości było 300 elementów belkowych.

4. Porównanie wyników

Szczegółowe obliczenia numeryczne wykonano dla 6 wariantów warunków brzegowych oznaczonych: BC1 – słup swobodnie podparty, BC2 – słup obustronnie utwierdzony, BC3 – utwierdzony koniec $x=0$ i koniec swobodny $x=L$, BC4 – koniec swobodny $x=0$ oraz koniec utwierdzony $x=L$, BC5 – koniec utwierdzony $x=0$ oraz koniec przegubowo podparty $x=L$, BC6 – koniec przegubowo podparty $x=0$ oraz koniec utwierdzony $x=L$.

Przyjęto 3 minimalne wartości momentów bezwładności przekroju poprzecznego: $I_{z1}=32111 \text{ mm}^4$, $I_{z2}=64192 \text{ mm}^4$ oraz $I_{z3}=96446 \text{ mm}^4$ oraz długości: 1000 mm; 2000 mm i 3000mm. Ponadto zakładano 3 różne liczby segmentów N , a mianowicie: 5, 10 oraz 20. Wartości najniższych obciążeń własnych odpowiadających wyoboczeniu globalnemu ściskanych słupów wyznaczono obiema omawianymi metodami (rys. 2). Maksymalna różnica pomiędzy wynikami nie przekracza 3%.



Rys. 2. Obciążenia krytyczne dla $N=20$ oraz $I_{z1}=32111 \text{ mm}^4$

Najniższe obciążenie własne odpowiadające wyoboczeniu globalnemu w funkcji długości słupa zmienia się w przybliżeniu zgodnie ze wzorem Eulera dla izotropowego słupa dla ustalonych pozostałych parametrów, czyli jako hiperbola stopnia drugiego. Stosunek minimalnych momentów bezwładności wpływa w przybliżeniu liniowo na obciążenie własne, co jest zgodne ze wzorem Eulera dla izotropowego słupa. Zwiększenie liczby segmentów z 5 do 10 powoduje zwiększenie obciążenia własnego o około kilkanaście procent, zaś z 10 do 20 już tylko około kilka procent. Dalsze zwiększanie liczby segmentów jest zatem niecelowe. Liczba segmentów N , stosunek momentów bezwładności oraz długość słupów praktycznie nie wpływa na postać wyoboczenia. Postać dla BC1 jest bliska praktycznie symetrycznej względem osi połowiącej długość słup, zaś dla BC2 dla lewego końca (tzn. dla $x=0$) postać wyoboczenia jest bardziej stroma niż dla prawego końca (tzn. dla $x=L$). Uwidacznia się mniejsza sztywność dla lewego końca. Postać wyoboczenia dla BC3 jest bardziej płaska na większej długości słupa niż dla BC4. Także w tym przypadku decyduje większa sztywność prawego końca. To powoduje duże różnice w wartościach obciążeń krytycznych

pomiędzy BC3 i BC4 wynoszące ponad dwa razy na korzyść BC4. Także w tym przypadku decyduje większa sztywność prawego końca. Ostatnie porównanie dotyczy warunków BC5 i BC6. Postacie wyoboczenia bardziej różnią się niż dla BC3 i BC4, ale wartości minimalnych, globalnych obciążeń własnych różnią się tylko o około 12%.

W przypadku omawianych słupów można również zastosować zmodyfikowany wzór Eulera:

$$P_{cr} = \pi^2 E^* I_z / (\mu^* L)^2 \quad (3)$$

gdzie: $E^* = 0.5(E_m + E_c)$ – wartość średnia modułu Younga, I_z – minimalny moment bezwładności przekroju poprzecznego, L – długość słupa, μ^* – zmodyfikowany współczynnik zamocowania (tab. 1).

Tabela 1. Wartość współczynnika $\mu^*[-]$

N	Warunki brzegowe					
	BC1	BC2	BC3	BC4	BC5	BC6
5	1,143	0,576	3,090	1,855	0,793	0,841
10	1,085	0,568	2,863	1,832	0,784	0,784
20	1,072	0,561	2,771	1,830	0,775	0,768

5. Podsumowanie

Najniższe obciążenie krytyczne odpowiadające wyoboczeniu globalnemu w funkcji długości omawianego słupa zmienia się w przybliżeniu zgodnie ze wzorem Eulera. Zwiększenie liczby segmentów z 5 do 10 powoduje istotne zwiększenie obciążeń własnych, zaś z 10 do 20 już tylko nieznaczne ich zwiększenie. Dalsze zwiększenie liczby segmentów jest niecelowe. Na globalną postać własną nie ma wpływu: liczba segmentów, stosunek momentów bezwładności czy długość słupów. Postacie globalne słupów są analogicznie jak w przypadku słupów izotropowych. Jedyna różnica wynika z różnej sztywności końców słupa.

Najniższe obciążenie globalne dla omawianych słupów można opisać zmodyfikowanym wzorem Eulera, w którym moduł Younga należy zastąpić wartością średnią i dodatkowo dobrać zmodyfikowany współczynnik zamocowania zależny od warunków podparcia słupów oraz liczby segmentów.

Badania A. Tetera zostały wykonane w ramach grantu FD-20/IM-5/122 sfinansowanego ze środków Funduszu Dyscypliny Inżynieria Mechaniczna Politechniki Lubelskiej.

Literatura

- [1] Liu J., He B., Ye W., Yang F. *High performance model for buckling of functionally graded sandwich beams using a new semi-analytical method.* Composite Structures, 262, 2021, 113614.
- [2] Huang Y., Zhang M., Rong H. *Buckling analysis of axially functionally graded and non-uniform beams based on Timoshenko theory.* Acta Mechanica Solida Sinica, 29, 2, 2016.
- [3] Soltani M. *Finite element modeling for buckling analysis of tapered axially functionally graded Timoshenko beam on elastic foundation.* Mechanics of Advanced Composite Structures, 7, 2020, 203-218.
- [4] Neamah R.A., Nassar A.A., Alansari L.S. *Buckling simulation of simply support FG beam based on different beam theories.* Basrah Journal for Engineering Sciences, Vol. 21, No. 3, (2021), 10-24.
- [5] Kolakowski Z., Czechowski L. *Non-linear stability of the in-plane functionally graded (FG) plate.* Composite Structures, 214, 2019, 264-268.
- [6] Kolakowski Z., Czechowski L. *Non-linear stability of the step-variable in-plane functionally graded plates subjected to linear approaches of the edges.* Materials 2020, 13, 1439.