

XVII Konferencja Naukowo-Techniczna

TKI2024

TECHNIKI KOMPUTEROWE W INŻYNIERII

15–18 października 2024

Jednowymiarowy model laminowanego słupa krzyżowego podlegającego wyboczeniu skrętnemu

Zbigniew Kolakowski¹, Andrzej Teter²

¹ Katedra Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji K12, Wydział Mechaniczny, Politechnika Łódzka

² Katedra Mechaniki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Lubelska

email: zbigniew.kolakowski@p.lodz.pl, a.teter@pollub.pl

STRESZCZENIE: W pracy oceniono różnice wpływów sztywności i podatności na stateczność skrętną słupów laminowanych wykonanych z laminatów o dowolnym układzie warstw wykazujących różne efekty sprzężenia stanu blonowego i zgięciowego. Przedstawiono jednowymiarowy model słupów poddanych równomiernemu ścisnaniu. Wyznaczone wartości własne porównano z wielkością obciążeń krytycznych określonych w analizie dwuwymiarowej bazującej na teorii Koitera oraz trzywymiarowym modelem MES. Szczegółowo analizowano słupy o przekroju krzyżowym podparte swobodnie. Przyjęto założenia teorii belek Eulera-Bernoulliego modelu jednowymiarowego układów zachowawczych. Analizowane słupy poddane były obciążeniom w zakresie stosowalności prawa Hooke'a. Przedstawiona analiza kładzie szczególny nacisk na rozróżnienie wpływu elementów macierzy podatności i sztywności. W dostępnej literaturze nie ma wyników opisujących wpływ elementów podatności na globalną stateczność skrętną słupów laminowanych. Praktycznie wszyscy autorzy koncentrują się na analizie wpływu elementów macierzy sztywności.

SŁOWA KLUCZOWE: wyboczenie skrętne, słup krzyżowy, MES, laminat ogólny

1. Wstęp

W modelowaniu jednowymiarowym oprócz czystego wyboczenia skrętnego najczęściej uwzględnia się wyboczenie giętkie ściskanych słupów oraz zwichrzenie [1]. W przypadku cienkościennych struktur może zachodzić wzajemne oddziaływanie różnych postaci wyboczenia. W pracy [2] opracowano jednowymiarowy model symetrycznych cienkościennych belek otwartych. Jest to rozwinięcie teorii prętów pryzmatycznych Własowa. W [3] omówiono rozwój modeli kinematycznych mających na celu symulację przenoszenia odkształcenia skrętnego na złączach ram łączących dwa lub więcej nie osiowych izotropowych ceowników lub dwuteowników. W kolejnej pracy [4] omówiono wyboczenie skrętne i początkowe wyboczenie osiowo ściskanych cienkościennych słupów ze stopu aluminium o przekroju bisymetrycznym. Założono, że zachowanie materiału kolumny jest opisane zależnością Ramberga-Osgooda w nieliniowym zakresie sprężystym. Przedstawiono przykłady numeryczne dotyczące swobodnie podpartej I-kolumny i przeanalizowano wpływ nieliniowości sprężystej materiału na obciążenia krytyczne i początkowe zachowanie po wyboczeniu. Pokazano, że w przekrojach z brakiem symetrii bimoment może znacząco wpływać na wyboczenie skrętne. W [5] rozważano kątowniki połączone ze sobą w celu utworzenia teowych lub krzyżowych przekrojów poprzecznych. Przekroje te są wrażliwe na wyboczenie skrętne i giętko-skrętne ze względu na kształt przekroju oraz fakt, że siła osiowa może nie być przyłożona w środku ścinania. Przeprowadzono analizę zachowania się ściskanych kątowników, teowników i przekrojów krzyżowych w podwyższonej temperaturze.

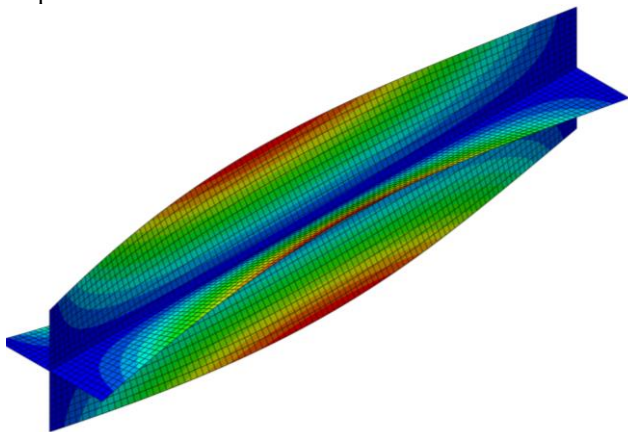
Lokalnie smukłe elementy przekrojów poprzecznych, takie jak kształtowniki otwarte ze stali formowanej na zimno, które podatne są na interakcyjne wyboczenie giętko-skrętne przy uwzględnieniu bimomentów i stężeń analizowano w [6]. Wszystkie te prace dotyczą konstrukcji wykonanych z materiałów izotropowych.

Wyboczenie jedno- i wielokomórkowych rur kompozytowych CFRP przy równomiernym skręceniu zbadano w pracy [7], stosując zarówno metodę analizy pasm skończonych, jak i elementów skończonych. Otrzymano wyraźnie różne wartości krytyczne obciążenia skręcającego w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara i przeciwnym cienkościennych wielokomórkowych rur kompozytowych CFRP. W [8] zaproponowano nowe podejście do charakteryzowania imperfekcji i odchyień wymiarowych pultruded glass fibre reinforced polymer (pGFRP) profiles w oparciu o podejście modalne. Procedura pozwala na uwzględnienie zginania w dwóch głównych płaszczyznach i skręcania.

2. Postawienie problemu

W pracy rozpatrzono laminowany słup pryzmatyczny o krzyżowym przekroju poprzecznym (rys. 1) poddany równomiernemu ścisnaniu. Do wyznaczenia globalnych obciążeń krytycznych słupów kompozytowych dla modelu jednowymiarowego zastosowano klasyczną teorię płyt laminowanych (CLPT). Przyjęto założenia teorii belek Eulera-Bernoulliego układów zachowawczych. Kolumny były smukłe, swobodnie podparte i poddane ścisnaniu w zakresie stosowalności prawa Hooke'a. Z klasycznej teorii płyt laminowanych CLPT wynikają bezpośrednio

zależności i wyrażenia konstytutywne dla macierzy sztywności i podatności. Pominięto lokalne wyboczenie słupa.



Rys. 1. Zarys i skrętna postać własna słupa krzyżowego

3. Metoda rozwiązania

Najniższe obciążenia własne i odpowiadające im mody własne (rys. 1) zostały wyznaczone poprzez rozwiązanie problemu wartości własnych czterema metodami. Metody 1-2 to modele jednowymiarowe uogólniają dobrze znane podejście do swobodnego skręcania przekrojów prostokątnych w wytrzymałości materiałów [1]. Metoda 1 bazuje na zależności wynikającej z wytrzymałości materiałów, że dla swobodnego skręcania moment skręcający jest wprost proporcjonalny do kąta skręcenia.

Metoda 2 zakłada, że kąt skręcenia dla swobodnego skręcania belki zależy od jej podatności. Trzecia metoda wykorzystuje model płytowy dwuwymiarowy w ujęciu Koitera [9]. Metody 1-3 odpowiadają czystemu swobodnemu wyboczeniu skrętnemu belki.

Czwarta metoda wykorzystuje Metodę Elementów Skończonych [10] z podejściem powłoki 3D, która weryfikuje dokładność poprzednich metod obliczeń. W metodzie 4 modelowany MES jest cały słup, co pozwala uwzględnić deplanację przekroju poprzecznego.

4. Zestawienie wyników

Wszystkie słupy są wykonane z 18 warstw laminatu (tabela 1). Wszystkie płyty tworzące słup krzyżowy mają identyczne wymiary: długość 1000mm, szerokość 50mm i grubość 5mm. Każda warstwa laminatu miała taką samą grubość. Założono, że stałe materiałowe każdej warstwy są identyczne i wynoszą: wzdluzny moduł Younga równy 170GPa, poprzeczny moduł Younga równy 7.6GPa, moduł Kirchhoffa równy 3.52GPa oraz współczynnik Poissona równy 0.36 [11]. Grubość każdej warstwy laminatu to 0.27775 mm.

Tabela 1. Laminaty 18-warstwowe [11]

Lp	Kombinacja	Układ warstw laminatu
1	1/7/13/19/25	$[a/-a_2/a/0_{10}/-a/a_2/-a]_T$
2	2/8/14/20/26	$[a/0/-a/a/-a_5/(0,-a)_3/a_2/-a]_T$
3	3/9/15/21/27	$[a/0/-a_2/a_5/(0,a)_2/0/-a_2/a_2]_T$
4	4/10/16/22/28	$[-a/0_5/a/-a/0/(a,-a)_3/-a/a_2]_T$
5	5/11/17/23/29	$[a/0_2/-a_2/a_3/-a_2/0_3/-a_2/0/a_2]_T$
6	6/12/18/24/30	$[-a/a_3/(0,-a)_2/0/a/-a/0/a/-a/a_2/0/-a]_T$

Dla przypadków 1-6 z tabeli 1 przeprowadzono obliczenia dla pięciu różnych kombinacji orientacji warstw, oznaczonych jako $\alpha=15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$. Kąt orientacji warstwy mierzono od osi wzdluznej kolumn, przy czym obrót w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara uznano za dodatni w przyjętym układzie współrzędnych.

Minimalne wartości własnych są dla przypadków 4 i 5 (tabela 1), zaś dla pozostałych przypadków (tzn. dla przypadków 1, 2, 3, 6 wartości są praktycznie takie same dla danego kąta α). Najniższe wartości bifurkacyjne otrzymano dla 15° i 75° , zaś największe dla 45° i wzrastają około 3 razy w porównaniu z minimalnymi.

Porównując wyniki dla ustalonych przypadków najniższe wartości krytyczne otrzymano dla metody 4 (MES), zaś dla metod 2 i 3 wartości są bliskie. Dla metody 1 wyniki są też zbliżone dla przypadków 1,2 i 6 (tabela 1) do wyników dla metod 2 i 3. Dla metody 1 i przypadków 3, 4 i 5 (tabela 1) wartości sił krytycznych są największe.

We wszystkich przypadkach analizowano najniższą postać skrętną przedstawioną na rys. 1.

5. Podsumowanie

Największe odchyłki względne najniższych obciążeń własnych odpowiadających wyboczeniu skrętnemu w przypadku metod 1-3 w porównaniu z metodą 4 (MES) były dla metody 1 i nie przekraczały 22%. Dla metody 2 odchyłki nie przekraczały 12%. Biorąc pod uwagę łatwość uzyskiwania rozwiązań, metoda 2 (model 1D), zdaniem autorów, jest zalecana, ponieważ daje wyniki z zalecaną dokładnością około 10% i jest znacznie mniej pracochłonna niż metoda 4 (model 3D MES). Metoda 3 (2D) daje wyniki zbliżone do metody 2.

Literatura

- [1] Bazant Z.P., Cedolin L., *Stability of Structures. Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories*, Oxford University Press, UK, 2010.
- [2] Andrade A., Camotim D., *Lateral-torsional buckling of singly symmetric tapered beams: theory and applications*, J Eng Mech, 131, 6, 586-597, 2005.
- [3] Basaglia C., Camotim D., Silvestre N., *Torsion warping transmission at thin-walled frame joints: kinematics, modelling and structural response*, J Constr Steel Res, 69, 1, 39-53, 2012.
- [4] Szymczak C., Kujawa M., *Torsional buckling and post-buckling of columns made of aluminium alloy*. Applied Mathematical Modelling, 60(2), 711-720, 2018.
- [5] Possidente L., Tondini N., Battini J.M., *Numerical analysis of the torsional and flexural-torsional buckling behaviour of compressed steel members at elevated temperature*. Special Issue:EUROSTEEL 2021 Sheffield — Steel's coming home, 4, 2-4, 1239-1245, 2021.
- [6] Xia Y., Glauz R.S., Schafer B.W., Seek M., Blum H.B., *Cold-formed steel strength predictions for torsion and bending-torsion interaction*. Thin-Walled Structures, 195, 111367, 2024.
- [7] Loughlan J., Yidris N.B., *The stability of thin-walled single and multi-cell cfp composite tubes in torsion*, Ninth International Conference on THIN-WALLED STRUCTURES ICTWS2023 Sydney, Australia, Nov 29 – Dec 1, 2023.
- [8] de Lazzari J.A., Martins L.L., Ribeiro A.S., Pinheiro A., Correia J.R., Silvestre N., *Global and local geometrical imperfections of pultruded GFRP profiles based on a modal approach*. Construction and Building Materials, 12, 134813, 2024.
- [9] Kolakowski Z., Krolak M., *Modal coupled instabilities of thin-walled composite plate and shell structures*, Composite Structures, 76, 303-313, 2006.
- [10] Abaqus HTML Documentation, Dassault Systems; 2022.
- [11] Teter A, Kolakowski Z., *On using load-axial shortening plots to determine the approximate buckling load of short, real angle columns under compression*, Composite Structures, 212, 175–183, 2019.