

Metoda modelowania procesów tarcia z wykorzystaniem odwzorowań przedziałami liniowych luz(...) i tar(...)

Dariusz Żardecki

Instytut Pojazdów i Transportu, Wojskowa Akademia Techniczna
email: dariusz.zardecki@wat.edu.pl

STRESZCZENIE: W artykule przedstawia się metodę modelowania procesów tarcia (kinetycznego i statycznego, w tym tzw. procesów „stick-slip”) w dyskretnych układach mechanicznych. Cechą znaną metody jest zastosowanie specjalnych przedziałami liniowych odwzorowań luz(...) i tar(...) wraz z ich oryginalnym aparatem matematycznym. Dzięki zastosowanym odwzorowaniom modele procesów tarcia są przejrzyste, łatwe do redukcji i zastosowania w symulacyjnych programach komputerowych MBS (Multibody Systems) wykorzystujących standardowe procedury rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych.

SŁOWA KLUCZOWE: Tarcie, stick-slip, odwzorowania przedziałami liniowe, procedury numeryczne

1. Wstęp – przedmiot, cel i zakres pracy

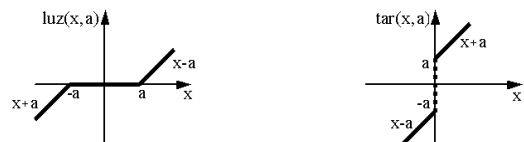
Działanie sił tarcia kinetycznego i statycznego objawiające się w procesach „stick-slip” (przyleganie-poślizg) wymaga stosowania nieliniowych modeli „niegładkich” i o zmiennej strukturze. „Niegładkość” modeli wynika z charakterystyk siły tarcia kinetycznego i statycznego. Zmienność struktury modelu spowodowana jest zmiennością liczby stopni swobody modelowanego układu, w którym dochodzi do szczytowania się (przyleganie) i rozczepiania (poślizg) trących elementów. Modelowanie i symulacja takich procesów stanowi rozległy i nadal otwarty problem naukowy [1-4] zarówno w sferze samej syntezy modelu, jak i w sferze analizy numerycznej. Teoria ogólna układów z tarciami wpisująca klasyczną teorię tarcia Coulomba-Amontonsa (i jej rozwinięcia związane np. z tzw. efektem Stribecka) w kanon mechaniki analitycznej pokazuje, że w pewnych zadaniach obliczeniowych napotykanym paradoksy formalne (np. „paradoks Painlewe” prowadzący do sprzeczności trygonometrycznych w opisie przestrzennych sił tarcia), czy też problemy niewyznaczalności rozkładu sił tarcia statycznego w stanach szczytowania. Dlatego też szczegółowe opublikowane modele analityczne odnoszą się do stosunkowo prostych układów i opisu bazującego raczej na heurystyce, niż na formalizmie mechaniki analitycznej. Metoda zaproponowana w pracach Autora [5-7], wykorzystująca metodę Gaussa dla rozwiązania problemów statycznej niewyznaczalności oraz specjalne przedziałami liniowe odwzorowania luz(...) i tar(...) może stanowić atrakcyjne narzędzie w syntezie modeli tarcia w złożonych dyskretnych układach mechanicznych. Dzięki zastosowaniu tych wzajemnie odwrotnych odwzorowań możliwe jest analityczne przekształcanie modeli, w tym ich redukcje (stosowane, gdy w układzie wieloelementowym występują elementy o dużych i małych masach), co ma istotne znaczenie w symulacji. Celem referatu jest przybliżenie

odwzorowań luz(...) i tar(...) z ich aparatem matematycznym oraz prezentacja opracowanej metody modelowania i symulacji dyskretnych układów mechanicznych działających z tarciami. Zakres opracowania obejmuje także przedstawienie reprezentatywnego przykładu.

2. Przedziałami liniowe odwzorowania luz(...) i tar(...)

Definicja i interpretację geometryczną luz(...) i tar(...):

$$\text{luz}(x, a) = x + \frac{|x-a| - |x+a|}{2} \quad \text{tar}(x, a) = \text{luz}^{-1}(x, a) \quad a \geq 0$$



Rys.1. Interpretacja odwzorowań luz(...) i tar(...).

Odwzorowania luz(...) i tar(...) posiadają dość prosty aparat matematyczny [5]. Poniżej przedstawia się kilka wybranych przykładów (tutaj $a, a_1, a_2, b, k, k_1, k_2 \geq 0$):

$$\begin{aligned} k \cdot \text{luz}(x, a) &= \text{luz}(k \cdot x, k \cdot a) & k \cdot \text{tar}(x, a) &= \text{tar}(k \cdot x, k \cdot a) \\ \text{luz}(\text{luz}(x, a), b) &= \text{luz}(x, a + b) & \text{tar}(\text{tar}(x, a), b) &= \text{tar}(x, a + b) \\ k_1 \cdot \text{tar}(x, a_1) + k_2 \cdot \text{tar}(x, a_2) &= (k_1 + k_2) \cdot \text{tar}\left(x, \frac{k_1 \cdot a_1 + k_2 \cdot a_2}{k_1 + k_2}\right) \end{aligned}$$

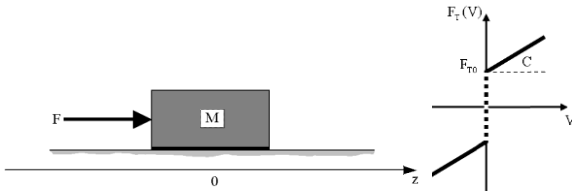
$$\text{Jeśli } \text{luz}(y, b) = k \text{luz}(x - y, a) \quad \text{to} \quad \text{luz}(y, b) = \frac{k}{k+1} \text{luz}(x, a + b)$$

$$\text{Jeśli } 0 \in y - k \text{tar}(x, a) \quad \text{to} \quad x = \text{luz}\left(\frac{1}{k}y, a\right).$$

Aparat luz(...) i tar(...) jest pomocny w analitycznym opisie charakterystyk przedziałami liniowych, w rozwikływaniu modeli, także tych zawierających inkluzje. Odwzorowania luz(..) i tar(...) pozwalają też wyjaśnić na drodze analitycznej pewne procesy dotyczące przetwarzania sygnałów (np. pojawianie się opóźnień).

3. Metoda wyznaczania modeli procesów tarcia

Syntezę modeli dokonuje się w kilku krokach, co wyjaśnia elementarny przykład dotyczący układu z rys.2 (klocek o masie M przemieszczający się po nieruchomej powierzchni, pod działaniem siły zewnętrznej F z tarcieniem wyrażanym tu charakterystyką siły tarcia Coulomba $F_T(V)$).



Rys.2. Jednomasowy układ z tarcieniem

Krok 1: Założenie typu charakterystyki siły tarcia od prędkości i jej wyrażenie jej poprzez odwzorowania. Tu:

$$F_T(V) = C \cdot \text{tar}\left(V, \frac{F_{T0}}{C}\right)$$

Dla $V = 0$ tarcie statyczne

$$F_T(0) = F_{T0} \cdot s^* \quad (s^* \in [-1,1]), \quad F_{TS} = F_{T0} \cdot s^*$$

Krok 2: Wstępna wersja modelu w postaci inkluzji. Tu:

$$M \cdot \ddot{z}(t) \in F(t) - C \cdot \text{tar}\left(\dot{z}(t), \frac{F_{T0}}{C}\right) \quad \text{czyli}$$

$$M \cdot \ddot{z}(t) = F(t) - C \cdot \text{tar}\left(\dot{z}(t), \frac{F_{T0}}{C}\right) \quad \text{if } \dot{z}(t) \neq 0$$

$$M \cdot \ddot{z}(t) \in F(t) - s^* F_{T0}, \quad s^* \in [-1,1] \quad \text{if } \dot{z}(t) = 0$$

Krok 3: Analiza modelu w stanach zerowych prędkości i wyznaczenie sił tarcia statycznego z wykorzystaniem Zasady Gaussa. Tu:

Gdy $\dot{z}(t) = 0$ siła tarcia statycznego $F_{TS} = s^* F_{T0}$ jest nieznaną, ale ograniczoną $F_{TS} \in [-F_{T0}, F_{T0}]$.

Stosując Zasadę Gaussa minimalizujemy „energię przyspieszeń” Q .

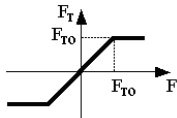
$$Q = M \cdot \dot{z}^2 = \frac{(F - F_{TS})^2}{M}$$

Zadanie minimalizacji ma postać

$$F_{TS}: \min_{F_{TS}} \frac{(F - F_{TS})^2}{M} \wedge |F_{TS}| \leq F_{T0}$$

Jego rozwiązanie stanowi funkcja przedziałami liniowa

$$F_{TS} = s^* F_{T0} = F - \text{luz}(F, F_{T0})$$



Rys.3 Charakterystyka siły tarcia statycznego

Krok 4: Model w postaci równań różniczkowych. Tu:

$$M \cdot \ddot{z}(t) = \begin{cases} F(t) - C \cdot \text{tar}\left(\dot{z}(t), \frac{F_{T0}}{C}\right) & \text{if } \dot{z}(t) \neq 0 \\ \text{luz}(F(t), F_{T0}) & \text{if } \dot{z}(t) = 0 \end{cases}$$

Jest to model o zmiennej strukturze “gotowy” do symulacji z wykorzystaniem standardowych procedur ODE.

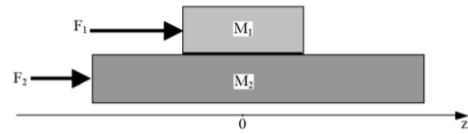
Zauważmy:

- Gdy $\dot{z}(t) = 0$ i $|F(t)| \leq F_{T0}$ zachodzi $\text{luz}(F(t), F_{T0}) = 0$, co oznacza także $\ddot{z}(t) = 0$ (stick). Gdy dochodzi do $|F(t)| > F_{T0}$, otrzymujemy $\text{luz}(F(t), F_{T0}) \neq 0$ i $\ddot{z}(t) \neq 0$ (slip).

- Gdy $M \rightarrow 0$ (redukcja modelu), po zastosowaniu inwersji $\text{tar}(\dots)$ otrzymujemy model w formie równania z $\text{luz}(\dots)$

$$C \cdot \dot{z}(t) = \text{luz}(F(t), F_{T0})$$

Stosując przedstawioną metodę do analogicznego ale dwumasowego układu (z tarcieniem pomiędzy klockami), uzyskujemy model w postaci 2 równań różniczkowych o zmiennej strukturze gotowy do wykorzystania w programie symulacyjnym ze standardowymi procedurami ODE.



Rys.4. Dwumasowy układ z tarcieniem

$$M_1 \ddot{z}_1 = \begin{cases} F_1 - C_{12} \text{tar}\left(\dot{z}_1 - \dot{z}_2, \frac{F_{T012}}{C_{12}}\right) & \text{if } \dot{z}_1 \neq \dot{z}_2 \\ \frac{M_1}{M_1 + M_2} (F_1 + F_2) + \text{luz}\left(\frac{M_2 F_1 - M_1 F_2}{M_1 + M_2}, F_{T012}\right) & \text{if } \dot{z}_1 = \dot{z}_2 \end{cases}$$

$$M_2 \ddot{z}_2 = \begin{cases} F_2 + C_{12} \text{tar}\left(\dot{z}_1 - \dot{z}_2, \frac{F_{T012}}{C_{12}}\right) & \text{if } \dot{z}_1 \neq \dot{z}_2 \\ \frac{M_2}{M_1 + M_2} (F_1 + F_2) - \text{luz}\left(\frac{M_2 F_1 - M_1 F_2}{M_1 + M_2}, F_{T012}\right) & \text{if } \dot{z}_1 = \dot{z}_2 \end{cases}$$

Przedstawione tu modele tarcia w układach jednomasowym i dwumasowym opisują elementarne procesy stick-slip. Modele te są równoważne uznanym modelom tarcia opracowanym przez Karnoppa, ale wprowadzone są w sposób bardziej formalny i wyrażone w formie zapewniającej dalsze analityczne przekształcenia. W przypadku rozbudowy struktury obiektu końcowa zmiennostrukturalna postać równań różniczkowych jest oczywiście bardziej skomplikowana, gdyż musi objąć wszystkie możliwe kombinacje występowania zerowych prędkości w parach ciernych. Taki złożony model będzie omówiony w rozszerzonej wersji referatu.

4. Podsumowanie

Wnioski wynikające z analizy literatury przedmiotowej oraz z prac autorskich są następujące:

- 1) Analiza literaturowa ukazuje niezwykle złożoność problematyki modelowania tarcia w dyskretnych układach mechanicznych i nadal otwarte obszary poszukiwań naukowych.
- 2) Opracowana autorska metoda syntezy modeli procesów tarcia oparta na wykorzystaniu odwzorowań $\text{luz}(\dots)$ i $\text{tar}(\dots)$ oraz zastosowaniu Zasady Gaussa wydaje się być dobrym kierunkiem takich poszukiwań.

Literatura

- [1] Karnopp D., *Computer Simulation of Stick-Slip Friction on Mechanical Dynamic Systems*. Transactions of the ASME. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 107, 100-103, 1985.
- [2] Grzesikiewicz W., *Dynamika układów mechanicznych z więzami*, Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Mechanika Nr 117, 1990.
- [3] Armstrong-Helouvy B., Dupont P., Canudas de Wit C., *A Survey of Models, Analysis Tools and Compensation Methods for the Control of Machines with Friction*. Automatica, Vol.30, No.7, pp. 1083-1138, 1994.
- [4] Brogliatto B, Dam A.A.T., Paoli L., Genot F., Abadie M., *Numerical simulation of finite dimensional multibody nonsmooth mechanical systems*. Applied Mechanical Review, Vol.55, No.2, pp. 107-150, 2002.
- [5] Żardecki D., *Piecewise Linear luz(...) and tar(...) Projection. Part 1 – Theoretical Background, Part 2 – Application in Modeling of Dynamic Systems with Freeplay and Friction*. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 44 (1), pp. 163-184, 185-202, 2006.
- [6] Żardecki D., *Piecewise Linear Modeling of Friction and Stick-Slip Phenomenon in Discrete Dynamical Systems*. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 44 (2), pp. 255-277, 2006.
- [7] Żardecki D., *Static Friction Indeterminacy Problems and Stick-Slip Phenomenon Modeling in Discrete Dynamic Systems*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 45 (2), pp. 289-310, 2007.