

XVII Konferencja Naukowo-Techniczna

TKI2024

TECHNIKI KOMPUTEROWE W INŻYNIERII

15–18 października 2024

Podatność a sztywność giętą w stateczności słupów laminowanych o dowolnym układzie warstw w modelu jednowymiarowym

Andrzej Teter¹, Zbigniew Kolakowski²

¹ Katedra Mechaniki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Lubelska

² Katedra Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji K12, Wydział Mechaniczny, Politechnika Łódzka
email: a.teter@pollub.pl, zbigniew.kolakowski@p.lodz.pl

STRESZCZENIE: W pracy zajęto się statecznością cienkościennych słupów laminowanych poddanych ścisłaniu o przekrojach prostokątnych. Omówiono słupy laminowane o dowolnych układach warstw laminatu zwracając uwagę na wpływ wszystkich typów sprzężeń podmacierzy sztywności na wartość minimalnego obciążenia własnego. Zastosowano cztery metody wyznaczania najniższych wartości własnych. Dwie pierwsze to analityczne metody belkowe 1D, gdzie zastosowano teorię Eulera-Bernoulliego. Metoda trzecia to analityczno-numeryczna metoda ANM perturbacyjna bazująca na teorii Koitera, zaś czwarta metoda to MES (podejście powłokowe), która stanowiła weryfikację wcześniejszych obliczeń. Podstawą rozważań teoretycznych jest klasyczna teoria płyt laminowanych CLPT. W szczegółowych obliczeniach przyjęto, że słupy są swobodnie podparte, a materiał każdej warstwy laminatu spełnia prawo Hooke'a. Porównując otrzymane wyniki stwierdzono, że zaproponowany jednowymiarowy, analityczny model belkowy jest równie dokładny jak dwuwymiarowy płytowy model analityczno-numeryczny, czy trzywymiarowy powłokowy model numeryczny MES.

SŁOWA KLUCZOWE: konstrukcje cienkościenne, modele analityczne, teoria Koitera, MES

1. Wprowadzenie

Upowszechnienie nowoczesnych struktur nośnych wykonanych z materiałów warstwowych powoduje konieczność prowadzenia prac nad metodami ich projektowania, które pozwolą małym nakładem dostosować ich własności do indywidualnych potrzeb. Godnymi zainteresowania są przypadki elementów cienkościennych wykonanych z laminatów wielowarstwowych o dowolnych układach warstw [1] podlegające ścisłaniu. Przyjmując nowoczesne technologie wytwarzania elementów nośnych [2], gdy do ich wytworzenia zastosowano warstwy laminatu o małej gęstości z łatwością można kształtować ich własności mechaniczne np. tj. sztywność czy wytrzymałość na zadane obciążenie. W pracach [3] szeroko omówiono własności laminatów stabilnych termicznie wykazujących różne efekty sprzężeń stanu błonowego i zgięciowego. Tylko ta grupa laminatów o dowolnych układach warstw nie ulega pacczeniu w procesie produkcji, gdy konieczne jest podgrzewanie struktury. W pracy [4] przeanalizowano zachowanie w stanie krytycznym i zakrytycznym ścisłanych elementów płytowych wykonanych z laminatów wykazujących różne kombinacje sprzężeń. Wrażliwość stanu krytycznego i zakrytycznego na ugięcia wstępne odpowiadające najniższej postaci własnej i zadanej amplitudzie omówiono w pracy [5].

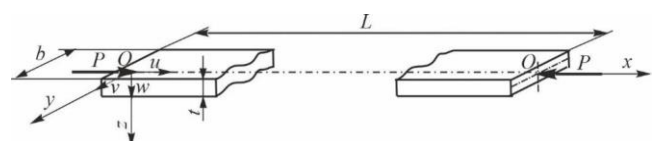
Ścisłane struktury cienkościenne najczęściej ulegają zniszczeniu na skutek utraty stateczności. Mogą to być różnego typu zjawiska tj. globalne wyboczenie, interakcyjne wyboczenie czy wyboczenie dystorsyjne. W projektowaniu należy również uwzględnić wyboczenie lokalne, które nie prowadzi do zniszczenia, ale może

istotnie obniżyć nośność struktury cienkościennej na skutek interakcji z inną postacią. W przypadku struktur smukłych należy oczekiwać, że za zniszczenie odpowiada postać globalna [6].

Ze względu na aspekty praktyczne, a w szczególności na indywidualizację cech mechanicznych omawianych struktur cienkościennych zasadne wydaje się pytanie: czy do opisu ich zachowań konieczne jest zastosowanie ogólnych teorii powłokowych czy płytowych [7]? W zastosowaniach praktycznych można zastosować metodę elementów skończonych [8]. A może dla wybranych przypadków można opracować prosty model belkowy zgodnie z teorią Eulera-Bernoulliego, który z dostateczną dokładnością pozwoli oszacować najniższe obciążenie własne?

2. Postawienie problemu

Do rozważań przyjęto wielowarstwowe słupy pryzmatyczne (rys. 1) o długości L i przekroju prostokątnym o wymiarach: szerokość b , grubość t . Każda warstwa może być wykonana z różnych materiałów spełniających prawo Hooke'a. Przyjęto również model Euler-Bernoulli belki.



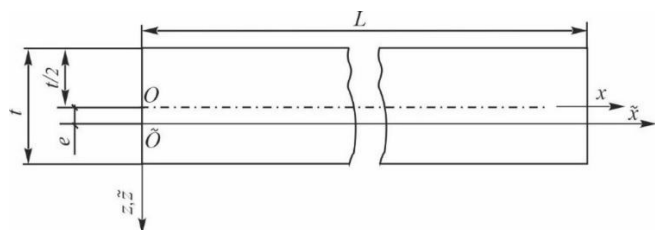
Rys. 1. Słup z zaznaczonymi wymiarami i przyjętym układem współrzędnych

Słupy są swobodnie podparte i podlegają równomiernemu ściskaniu w zakresie sprężystym. Przyjmując klasyczną teorię laminowanych płyt (CLPT) wprost wynika związek konstytutywny i wyrażenia na macierze sztywności oraz podatności [9]. Pominięto lokalne wyboczenie słupa.

3. Metoda rozwiązania

W klasycznej teorii belek Eulera-Bernoulliego punktem redukcji obciążenia jest środek ciężkości, a dla belek kompozytowych jest środek sztywności (rys. 2).

W metodzie 1 wartości najniższej wartości własnej określono uwzględniając przesunięcie środka sztywności względem powierzchni środkowej słupa.



Rys. 2. Zarys słupa z określonym położeniem środka sztywności oraz powierzchni środkowej

W metodzie 2 wykorzystując macierzy podatności siły wewnętrzne zredukowane są do środka słupa. Rozwiązując zadanie własne określono najniższą wartość własną.

W metodzie 3 zastosowano model płytowy wykorzystując pierwszy rząd nieliniowych przybliżeń teorii Koitera dla CLPT. Problem rozwiązano za pomocą zmodyfikowanej metody analityczno-numerycznej (ANM) wykorzystującej pełny tensor odkształcenia i macierz przejścia z zastosowaniem ortogonalizacji Godunowa [10].

Metoda 4 to weryfikacja powyższych modeli, w której zadanie własne rozwiązano metodą elementów skończonych. Ściskane słupy modelowano powłokowymi elementami skończonym typu S8R. Układ warstw w modelu FEM przygotowano w module Composite Layup Manager [11].

4. Porównanie wyników

Szczegółowe symulacje prowadzono dla laminowanych słupów o wymiarach: długość 1000mm, szerokość 50mm i grubość 5mm. Grubość każdej warstwy laminatu była jednakowa.

Przyjęto, że stałe materiałowe każdej z warstw są identyczne i wynoszą: wzdłużny moduł Younga: 170GPa, poprzeczny moduł Younga: 7.6GPa, moduł Kirchhoffa 3.52GPa oraz współczynnik Poissona: 0.36. Rozpatrzono kompozyty wielowarstwowe: 18 warstwowych o grubości 0.27775mm każda [12].

Tabela 1. Laminaty 18-warstwowe [12]

Lp	Kombinacja	Układ warstw laminatu
1	1/7/13/19/25	$[a/a_2/a/0_1/0/a_2/a]_T$
2	2/8/14/20/26	$[a/0/a/a/a_3/(0,-a)_3/a_2/a]_T$
3	3/9/15/21/27	$[a/0/a_2/a_3/(0,a)_2/0/a_2/a_2]_T$
4	4/10/16/22/28	$[-a/0_3/a/a/0/(a,-a)_3/a/a_2]_T$
5	5/11/17/23/29	$[a/0_2/a_2/a_3/a_2/0_3/a_2/0/a_2]_T$
6	6/12/18/24/30	$[-a/a_3/(0,-a)_2/0/a/a/0/a/a/a_2/0/a]_T$

W przypadku omawianych słupów ułożenie warstw laminatu podano w tabeli 1. Największe wartości minimalnych wartości własnych są dla kąta a wynoszącego 15° i szybko spadają wraz ze wzrostem tego kąta. Najmniejsze wartości minimalnych wartości własnych otrzymano gdy kąt $a > 45^\circ$. Głównym celem pracy jest porównanie rozwiązań otrzymanych metodami 1-3 i oszacowanie odchylenia wyników od wartości referencyjnych otrzymanych metodą 4 (MES). Porównując różne względne wartości minimalnych wartości własnych pomiędzy wszystkimi metodami wyznaczone z zależności można stwierdzić, że w przypadku metody 1 najmniejsza różnica wynosi około 1.5%, zaś maksymalna ponad 130%. Różnica dla metod 2 i 3 jest we wszystkich przypadkach mniejsza od 2%.

5. Podsumowanie

Wyznaczono minimalne wartości własne czterema metodami, z czego metody 1-2 dotyczyły modelu jednowymiarowego, metoda 3 modelu dwuwymiarowego, zaś metoda 4 FEM stanowiła weryfikację dla wcześniejszych metod. Metoda 1 bazuje na wzdłużnej sztywności giętej słupa i redukcji obciążenia do środka sztywności przekroju poprzecznego. Metoda 2 wykorzystuje macierz odwrotną sztywności, czyli podatność giętą wzdłużną. Podstawą metody 3 ANM jest teoria Koitera dla płyt cienkościennych.

Uzyskano bardzo dobrą zgodność dla wszystkich analizowanych przypadków słupów dla metod 2-4, zaś dla metody 1 największy błąd jest nieakceptowalny, bo wynosił ponad 130%. Ze względu na łatwość uzyskania rozwiązań polecana jest metoda 2 (model jednowymiarowy), która jest równie dokładna jak o wiele bardziej pracochłonne metody 3-4 (modele wielowymiarowe).

Literatura

- [1] Verchery G., *Design rules for laminate stiffness*, Mech Compos Mater 47(1), 47–58, 2011.
- [2] Zerong Ding, Hongyan Wang, Jiaming Luo, Nan Li., *A review on forming technologies of fibre metal laminates*, International Journal of Lightweight Materials and Manufacture 4, 110-126, 2021.
- [3] York CB., *Tapered hygro-thermally curvature-stable laminates with non-standard ply orientations*, Compos A Appl Sci Manuf 44, 140–148, 2013.
- [4] Teter A., Kolakowski Z., *Influence of mechanical couplings on the buckling behaviour of thin-walled plates made of general laminates under compression*, Composite Structures 166, 68–76, 2017.
- [5] Kubiak T, Urbaniak M, Zucco G, Madeo A., *Imperfection sensitivity analysis of the nonlinear stability of composite beams - Numerical and experimental investigations*, Compos. Part B, 94, 360-369, 2016.
- [6] Teter A., Kolakowski Z., *Global buckling of axially functionally graded columns with variable boundary conditions*, Composite Structures, 304(2), 116430, 2023.
- [7] van der Heijden A.M.A. (ed.), W.T. Koiter's *Elastic Stability of Solids and Structures*, Cambridge University Press, 2009.
- [8] Barbero E.J., *Finite Element Analysis of Composite Materials using Abaqus*, Composite Materials. Taylor & Francis Group, 2023.
- [9] Reddy J.N., *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells*, CRC Press, Boca Raton, FL, 2nd edition, 2003.
- [10] Kolakowski Z., Krolak M., *Modal coupled instabilities of thin-walled composite plate and shell structures*, Composite Structures, 76, 303-313, 2006.
- [11] *Abaqus HTML Documentation*, Dassault Systems, 2022.
- [12] Teter A, Kolakowski Z., *On using load-axial shortening plots to determine the approximate buckling load of short, real angle columns under compression*, Composite Structures, 212, 175–183, 2019.